G. Hunault *La Rochelle, février 2020*

Mathématiques pré CRPE

1. Calculer

Soit B l'expression $(x-5)\times(2x+6)$.

Donner l'expression développée réduite équivalente à B.

Calculer B pour $x=0$, puis pour $x=1$ et enfin pour $x=\dfrac{1}{3}$.

Pour les calculs, on pourra utiliser au choix l'expression originale de B ou son expression développée réduite.

2. Résoudre

Résoudre l'équation $(B1)$: $(x-5)\times(2x+6)=2x^2+1$.

Résoudre l'équation $(B2)$: $(4x+5)\times(x-3)=-4x-5$.

3. Des phrases aux formules

Donner une écriture mathématique de l'énoncé suivant :

> ≪ *pour des nombres strictement positifs, le carré de la somme de deux nombres est strictement supérieur à la somme de leurs carrés* ≫.

Afin d'homogénéiser les formules, vous nommerez a et b ces nombres.

Est-ce que cet énoncé est vrai ou faux ? Vous n'oublierez pas de détailler et de justifier votre réponse.

4. Traduire

Voici le début de l'énoncé d'un exercice en trois phrases :

> (S1) : J'ai un ami nettement plus jeune que moi.
> (S2) : Cette année, j'ai 20 ans de plus que lui.
> (S3) : Il y a 10 ans, j'avais le double de son age.

Traduire en formules les affirmations numériques de l'énoncé. On nommera x l'âge en années du narrateur et y l'âge de son ami (en années également).

Résoudre ensuite les équations associées si le problème admet une solution.

A partir de quel âge ou à partir de niveau de calcul un apprenant est-il capable de résoudre ce problème ?

Que peut-on reprocher à cet énoncé en termes d'identification de l'apprenant ?

5. Convertir

Donner une décompositions égyptienne de $q = \dfrac{5}{8}$ c'est-à-dire donner deux fractions unitaires dont la somme est q.

Indiquer ensuite, dans le cas général, comment trouver une décomposition égyptienne possible de

$$\frac{n+1}{2 \times n}$$

6. Discussion

Vous essaierez de construire une réponse structurée et bien rédigée à à la question suivante, si possible à l'aide d'exemples concrets.

> *au niveau du primaire, un énoncé de problème mathématique doit-il forcément être plus informatif que narratif ?*

Il est conseillé d'utiliser au moins trois mots de trois syllabes ou plus pour « transmettre un contenu rédactionnel fort ».

Une dizaine de lignes parait être une rédaction minimale avec au moins deux exemples.

ESQUISSE DE SOLUTION

1. Calculer

$$\begin{aligned}
\text{B} &= (x-5)\times(2x+6) \\
&= 2x^2+6\times x-5\times 2x-5\times +6 \\
&= 2x^2+6x-10x-30 \\
&= 2x^2-4x-30
\end{aligned}$$

Si $x=0$, $B=-30$.

Pour $x=1$, $B=(1-5)\times(2\times 1+6)=-4\times 8=-32$.

Pour $x=\dfrac{1}{3}$:

$$\begin{aligned}
B &= 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2-4\times\frac{1}{3}-30 \\
&= 2\times\frac{1}{9}-\frac{4}{3}-\frac{90}{3}=\frac{2}{9}-\frac{94}{3} \\
&= \frac{2-94\times 3}{9}=\frac{2-282}{9} \\
&= -\frac{280}{9}\text{ (fraction non simplifiable) soit environ 31.11.}
\end{aligned}$$

2. Résoudre

On commence par passer tous les termes de droite dans l'équation ($B1$) à gauche du signe égal. On a alors $2x^2-4x-30-(2x^2+1)=0$. Donc une fois développée, réduite, ordonnée et normalisée, l'équation ($B1$) devient $-4x-31=0$ d'où $x=-\dfrac{31}{4}$.

De la même façon, avec tous les termes de droite dans l'équation ($B2$) à gauche du signe égal, il reste à résoudre $4x^2-3x-10=0$ et nous n'avons pas appris à résoudre les équations du second degré. Les solutions seraient -5/4 et 2. On peut les trouver en remarquant que $4x+5$ est commun aux deux termes de l'égalité. $(4x+5)\times(x-3)=-4x-5$ devient $(4x+5)\times(x-3)-(4x+5)=0$ soit $(4x+5)\times(x-3+1)=0$.

3. Des phrases aux formules

Si a et b sont des nombres, $a+b$ est leur somme, $(a+b)^2$ est le carré de leur somme et a^2+b^2 est la somme de leurs carrés. L'énoncé proposé doit donc s'écrire

$$(a+b)^2 \ > \ a^2+b^2 \text{ pour } a>0 \text{ et } b>0$$

Quelques essais numériques avec a et b semblent montrer que l'énoncé est vrai. Voici la démonstration :

$$(a+b)^2 \ -(a^2+b^2) = a^2+2ab+b^2-a^2-b^2 = 2ab.$$

Puisque a et b sont positifs, leur produit est positif, soit $2ab \ > \ 0$.

On en déduit que $(a+b)^2 \ -(a^2+b^2) \ > \ 0$ ce qui est bien équivalent à $(a+b)^2 \ > \ a^2+b^2$.

4. Traduire

Les affirmations numériques de l'énoncé se traduisent par

$(S1) : y \ < \ x$

$(S2) : x \ = \ y+20$

$(S3) : (x-10) \ = \ 2\times(y-10)$

Si on reporte $S(2)$ dans $(S3)$ on obtient l'équation $(y+20-10) = 2\times(y-10)$ soit encore $y+10 = 2y-20$ d'où $y = 30$ et on en déduit donc que $x = 50$. Vérifications : $50 = 30+20$ et $(50-10) = 40 = 2\times 20 = 2\times(30-10)$.

5. Convertir

Si on remarque que $5 = 4+1$ et que $8 = 4\times 2$, on peut écrire la décomposition

$$\frac{5}{8} = \frac{4+1}{8} = \frac{4}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1}{2}+\frac{1}{8}.$$

On peut essayer « à tout hasard » la décomposition $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + q$ et on trouve alors $q = \frac{1}{8}$.

On peut aussi utiliser la méthode vue en cours : $\frac{8}{5}$ vaut $a = 1,6$ donc $[a]$=1 en entier. La décomposition s'écrit $\frac{5}{8} = \frac{1}{[a]+1} + q$ et on retrouve l'équation $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + q$ précédente.

Dans le cas général

$$\frac{n+1}{2 \times n} = \frac{n}{2 \times n} + \frac{1}{2 \times n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times n}.$$

L'exemple numérique précédent correspond donc à $n = 4$.

6. Résolution avec Maxima

```
B(x) := (x-5)*(2*x+6) ;
print(expand(B(x))) ;
print(B(0)) ;
print(B(1)) ;
print(B(1/3)) ;

solve(B(x)=2*x^2+1,x) ;
solve((4*x+5)*(x-3)=-4*x-5,x) ;

solve([x=y+20,(x-10)=2*(y-10)],[x,y]) ;
```