G. Hunault *La Rochelle, mars 2019*

Mathématiques pré CRPE

1. Calculer

Soit C l'expression $(4x+5)(x-3)$.

Donner l'expression développée réduite équivalente à C.

Calculer C pour $x=0$, puis pour $x=1$ et enfin pour $x=\dfrac{1}{7}$.

Pour les calculs, on pourra utiliser au choix l'expression originale de C ou son expression développée réduite.

2. Résoudre

Résoudre l'équation $(A1)$: $(4x+5)(x-3)=4x^2+1$.

Résoudre l'équation $(A2)$: $(4x+5)(x-3)=-7x-5$.

3. Traduire

Voici le début de l'énoncé d'un exercice en trois phrases :

> (P1) : Laure, Marie et Jean ont trente billes ensemble.
> (P2) : Marie a deux billes de plus que Jean.
> (P3) : Laure a deux fois plus de billes que Jean.

Traduire en formules les affirmations numériques de l'énoncé en nommant x le nombre de billes de Jean, y le nombre de billes de Marie et z le nombre de billes de Laure.

Reporter les valeurs de y et z en fonction de x dans (P1) puis résoudre l'équation associée à (P1). Donner ensuite les valeurs de y et de z.

Le choix de *billes* plutôt que *bonbons* ou *euros* est-il judicieux ?

4. Convertir

Donner la notation en colonne *Excel* de 1515 selon la méthode vue en cours.

Est-ce que cela vous aide de savoir que la notation en colonne *Excel* de 1500 est BER et que celle de 1541 est BGG ?

5. Géométrie

Soient A, B et C trois points du plan définis par leurs coordonnées :
$A = (3, 4)$, $B = (6, 2)$, $C = (3, 2)$. Tracer une figure avec ces points.

Donner l'équation de la droite AB.

Calculer la longueur des segments AB, AC et BC.

Le triangle ABC est-il rectangle ? Si oui, où est l'angle droit ?

6. Statistiques

Quelle est la vitesse moyenne d'un trajet de 20 km parcouru à 40 km/h à l'aller et à 10 km/h au retour ?

7. Discussion

Vous essaierez de construire une réponse structurée et bien rédigée à à la question suivante, si possible à l'aide d'exemples concrets.

> *Faut-il utiliser deux dés de couleurs différentes pour montrer la commutativité de l'addition dès que les enfants savent compter jusquà 12 ?*

Il est conseillé d'utiliser au moins trois mots de trois syllabes ou plus pour « transmettre un contenu rédactionnel fort ».

Une dizaine de lignes parait être une rédaction minimale avec au moins deux exemples.

ESQUISSE DE SOLUTION

1. Calculer

$$\begin{aligned} \text{C} &= (4x+5)(x-3) \\ &= 4x^2 + 4x \times -3 + 5x + 5 \times -3 \\ &= 4x^2 - 12x + 5x - 15 \\ &= 4x^2 - 7x - 15 \end{aligned}$$

Si $x = 0$, $C = (4 \times 0 + 5)(0 - 3) = 5 \times -3 = -15$.

Pour $x = 1$, $C = (4 \times 1 + 5)(1 - 3) = 9 \times -2 = -18$.

Pour $x = \dfrac{1}{7}$:

$$\begin{aligned} C &= 4 \times \left(\frac{1}{7}\right)^2 - 7 \times \frac{1}{7} - 15 \\ &= 4 \times \frac{1}{49} - 1 - 15 = \frac{4}{49} - 16 \\ &= \frac{4 - 16 \times 49}{49} = \frac{4 - 784}{49} \\ &= -\frac{780}{49} \text{ (fraction non simplifiable) soit environ } 15,918. \end{aligned}$$

2. Résoudre

On commence par passer tous les termes de l'équation $(A1)$ à gauche du signe égal. On a alors $4x^2 - 7 - 15 - 4x^2 - 1 = 0$. Donc une fois développée, réduite, ordonnée et normalisée, l'équation $(A1)$ devient $-16 = 7x$ d'où $x = -\dfrac{16}{7}$.

De la même façon, avec tous les termes de l'équation $(A2)$ à gauche du signe égal, il reste à résoudre $4x^2 - 15 + 5 = 0$ d'où $2x^2 = 5$, soit $x^2 = \dfrac{5}{2}$. Sa solution est $x = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ soit environ $-1,581$ ou $1,581$.

3. Traduire

Les affirmations numériques de l'énoncé se traduisent par

$(P1) : z + y + x = 30$

$(P2) : y = x + 2$

$(P3) : z = 2x$

Si on reporte dans $(P1)$ on obtient l'équation $2x + (x + 2) + x = 30$ soit encore $4x = 30 - 2$ d'où $x = 28/4 = 7$. Donc Jean a 7 billes, Marie en a $7 + 2 = 9$ et Laure $2 \times 7 = 14$. Au total, cela fait $7 + 9 + 16 = 30$, le compte est bon.

4. Convertir

La division euclidienne de 1515 par 26 s'écrit $1515 = 58 \times 26 + 7$. Si on divise à nouveau 58 par 26, on trouve $58 = 2 \times 26 + 6$, soit en reportant : $1515 = 58 \times 26 + 7 = (2 \times 26 + 6) \times 26 + 7 = 2 \times 26^2 + 6 \times 26 + 7$. Il s'agit donc d'un mot de trois lettres correspondant, dans cet ordre à 2, 6 et 7. C'est donc BFG.

Connaitre les mots associés à 1500 et 1541 peut aider, puisque 1515=1500+15 et que 1541=1515+26.

Si on ajoute 15 à BER, R+15 donne G en changeant de lettre (car $18 + 33 > 26$) et on obtient donc BFG.

Si on retranche 26 à BGG, il faut prendre la lettre qui précéde le deuxième G et on obtient aussi BFG donc cela permet de vérifier notre calcul.

5. Statistiques

Comme 20 km = 40 km $\times \frac{1}{2}$, il faut $\frac{1}{2}$ heure pour le trajet aller.

De même, 20 km = 10 km $\times 2$, donc il faut 2 heures pour le trajet retour.

En tout on a donc parcouru $20 + 20 = 40$ km en $\frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$ h.

La vitesse moyenne est donc $\dfrac{40}{\dfrac{5}{2}} = \dfrac{80}{5} = 16$ km/h.

On aurait aussi pu appliquer la formule de la *moyenne harmonique* de 40 km/h et de 10 km/h :

$$h = \frac{2}{\frac{1}{40}+\frac{1}{10}} = \frac{2}{\frac{1}{40}+\frac{4\times 1}{4\times 10}} = \frac{2}{\frac{1+4}{40}} = \frac{2}{\frac{5}{40}} = \frac{2}{1}\times\frac{40}{5} = \frac{80}{5} = 16 \text{ km/h.}$$

6. Géométrie

Si $y = ax + b$ est l'équation de la droite qui passe par les points $A = (3,4)$ et $B = (6,2)$, les coordonnées (x,y) de ces points doivent vérifier les deux relations $4 = a \times 3 + b$ et $2 = a \times 6 + b$.

Si on soustrait membre à membre ces équations, on trouve $-2 = 3a$, d'où $a = -\dfrac{2}{3}$ et $b = 6$, l'équation de la droite (AB) est donc $y = -\dfrac{2}{3}x + 6$.

La longueur du segment qui relie $M_1 = (x_1, y_1)$ et $M_2 = (x_2, y_2)$ est donnée par la formule

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Pour AB on trouve donc $\sqrt{(3-6)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \simeq 3,6$.

De même, $AC = \sqrt{(3-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{0 + 2^2} = 2$.

Enfin, $BC = \sqrt{(6-3)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{3^2 + 0} = 3$.

La somme $AC^2 + BC^2$ vaut $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$. Comme $AB^2 = 13$ le triangle ABC est rectangle par application de la réciproque du théorème de *Pythagore*. L'angle droit est en face de l'hypothénuse qui est AB, le plus grand coté.

C'est donc l'angle $\widehat{ACB}$.

7. Résolution avec Maxima

```
C(x) := (4*x+5)*(x-3) ;
print(expand(C(x))) ;
print(C(0)) ;
print(C(1)) ;
print(C(1/7)) ;
```

```
solve(C(x)=4*x^2+1) ;
solve(C(x)=-7*x-5) ;

solve([x+y+z=30,y=x+2,z=2*x],[x,y,z]) ;

print( 2/( (1/40) + (1/10)) ) ;

D(x) := a*x + b ;
solve([ 4=D(3), 2=D(6)],[a,b]) ;

distance(x1,y1,x2,y2) := sqrt( (x1-x2)^2 + (y1-y2)^2 ) ;
distance(3,4,6,2) ;
distance(3,4,3,2) ;
distance(6,2,3,2) ;
```