

## Mathématiques pré CRPE

### 1. Calculer

Soit  $E$  l'expression  $(3x + 1)(x + 2)$ .

Donner l'expression développée réduite équivalente à  $E$ .

Calculer  $E$  pour  $x = 0$ , puis pour  $x = 3$  et enfin pour  $x = \frac{2}{3}$ .

Pour les calculs, on pourra utiliser au choix l'expression originale de  $E$  ou son expression développée réduite.

### 2. Résoudre

Résoudre l'équation (A1) :  $(3x + 1)(x + 2) = 7x + 4$ .

Résoudre l'équation (A2) :  $(3x + 1)(x + 2) = 3x^2 - 1$ .

### 3. Traduire

Voici l'énoncé d'un exercice :

*Kiki et Mimi ont reçu de l'argent à Noël. Si Mimi donne un euro à Kiki, Mimi a deux fois plus d'argent que Kiki. Si par contre Kiki donne un euro à Mimi, Mimi a trois fois plus d'argent que Kiki. Combien d'argent en euros ont-ils chacun ?*

Traduire en formules les affirmations numériques de l'énoncé puis calculer mathématiquement la solution.

Est-ce bien utile d'avoir « *par contre* » dans la rédaction ?

## 4. Convertir

Donner deux décompositions égyptiennes strictes de  $q = \frac{9}{10}$  c'est-à-dire donner des fractions unitaires **différentes** dont la somme est  $q$ .

On pourra remarquer que  $q = \frac{9}{10} = \frac{7}{10} + \frac{2}{10}$  est une piste intéressante, compte-tenu de  $2 + 5 = 7$  et de  $2 \times 5 = 10$ .

## 5. Analyser

On a demandé à des enfants de réaliser des additions. Voici le tableau des calculs réalisés. A gauche du signe égal, ce qui était demandé. A droite du signe égal, ce qui a été calculé. Trouver où les enfants se sont trompés et pourquoi. Qu'aurait-on du faire ?

$$(O_1) : 2 + 2 = 4$$

$$(O_2) : 2 + 3,1 = 5,1$$

$$(O_3) : 3,10 + 4,01 = 7,11$$

$$(O_4) : 3,8 + 5,3 = 8,11$$

$$(O_5) : 3,10 + 6,00 = 9,1000$$

## 6. Discussion

Vous essaierez de construire une réponse structurée et bien rédigée à la question suivante, si possible à l'aide d'exemples concrets.

*Faut-il fournir aux jeunes apprenants plusieurs contre-exemples d'un même énoncé faux comme le carré de la somme est la somme des carrés pour qu'ils comprennent que l'énoncé est faux ?*

Il est conseillé d'utiliser au moins trois mots de trois syllabes ou plus pour « transmettre un contenu rédactionnel fort ».

Une dizaine de lignes paraît être une rédaction minimale avec au moins deux exemples.

# ESQUISSE DE SOLUTION

## 1. Calculer

$$\begin{aligned} E &= (3x + 1)(x + 2) \\ &= 3x^2 + 3x \times 2 + x + 2 \\ &= 3x^2 + 7x + 2 \end{aligned}$$

Si  $x = 0$ ,  $E = (3 \times 0 + 1)(0 + 2) = 1 \times 2 = 2$ .

Pour  $x = 3$ ,  $E = (3 \times 3 + 1)(3 + 2) = 10 \times 5 = 50$ .

Pour  $x = \frac{2}{3}$  :

$$\begin{aligned} E &= \left(3 \times \frac{2}{3} + 1\right) \left(\frac{2}{3} + 2\right) \\ &= (2 + 1) \left(\frac{2}{3} + \frac{2 \times 3}{3}\right) \\ &= 3 \left(\frac{8}{3}\right) = 8 \end{aligned}$$

## 2. Résoudre

On commence par passer tous les termes de l'équation (A1) à gauche du signe égal. On a alors  $(3x + 1)(x + 2) - (7x + 4) = 3x^2 - 2$ . Donc une fois développée, réduite, ordonnée et normalisée, l'équation (A1) devient  $3x^2 = 2$ .

Sa solution est  $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$  ou  $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ .

De la même façon, avec tous les termes de l'équation (A2) à gauche du signe égal, il reste à résoudre  $7x + 3 = 0$  d'où  $x = -\frac{3}{7}$ .

## 3. Traduire

Si on note  $m$  l'argent en euros de Mimi et  $k$  l'argent en euros de Kiki, alors si Mimi donne un euro à Kiki, Mimi n'a plus que  $m - 1$  euros alors que Kiki en a  $k + 1$ . De la même façon, si Kiki donne un euro à Mimi, Kiki n'a plus que  $k - 1$  euros alors que Mimi en a  $m + 1$ .

Les affirmations numériques de l'énoncé se traduisent par

$$(N_1) : m - 1 = 2(k + 1) \text{ et } (N_2) : m + 1 = 3(k - 1).$$

De  $(N_1)$  on déduit que  $m = 2k + 3$  et si on remplace  $m$  par cette expression dans  $(N_2)$  on obtient l'équation  $m + 1 = 2k + 3 + 1 = 2k + 4 = 3(k - 1)$ , soit encore  $2k + 4 = 3k - 3$  d'où  $k = 7$ . On en déduit  $m = 2 \times 7 + 3 = 17$ .

**Vérifions :**  $m - 1 = 17 - 1 = 16 = 2 \times 8 = 2 \times (7 + 1) = 2(k + 1)$  et  $m + 1 = 17 + 1 = 18 = 3 \times 6 = 3 \times (7 - 1) = 3(k - 1)$ , c'est bon!

Le terme *par contre* n'est peut-être pas adapté : il pourrait indiquer une contradiction alors qu'il n'y en a aucune.

## 4. Convertir

Pour trouver une première décomposition égyptienne stricte de  $q = \frac{9}{10}$  on commence par appliquer la méthode vue en cours, et décrite dans le wiki français.

$$\frac{10}{9} = \textcircled{1}, 111\dots \text{ donc } \frac{9}{10} \text{ s'écrit } a \text{ priori } \frac{1}{\textcircled{1} + 1} + r = \frac{1}{2} + r.$$

$$\text{Si on calcule } r \text{ par } \frac{9}{10} - \frac{1}{2}, \text{ on trouve } r = \frac{9}{10} - \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{9 - 5}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

$$\frac{5}{2} = \textcircled{2}, 5 \text{ donc } \frac{2}{5} \text{ s'écrit } a \text{ priori } \frac{1}{\textcircled{2} + 1} + s = \frac{1}{3} + s.$$

$$\text{Si on calcule } s \text{ par } \frac{2}{5} - \frac{1}{3}, \text{ on trouve } s = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} - \frac{1 \times 5}{3 \times 5} = \frac{6 - 5}{15} = \frac{1}{15}.$$

$$\text{C'est donc fini : } \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}.$$

$$\text{On reporte dans } \frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5}$$

$$\text{et on trouve } \frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}.$$

Pour trouver une deuxième décomposition stricte de  $\frac{9}{10}$ , on utilise la piste fournie  $\frac{9}{10} = \frac{7}{10} + \frac{2}{10}$ .

$$\frac{7}{10} \text{ se décompose } \textit{naturellement} \text{ en } \frac{1}{2} + \frac{1}{5}.$$

$$\frac{2}{10} \text{ vaut aussi } \frac{1}{5}.$$

Nous avons vu ensemble en cours que pour décomposer  $\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$  il faut remplacer le deuxième  $\frac{1}{n}$  par  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n \times (n+1)}$  pour conclure.

Ici, le dernier  $\frac{1}{5}$  vaut  $\frac{1}{5+1} + \frac{1}{5 \times (5+1)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{30}$ .

Donc au final  $\frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30}$ .

## 5. Analyser

L'erreur est en  $(0_4)$  car  $3,8 + 5,3$  vaut  $9,1$  et pas  $8,11$ .

L'enfant a sans doute additionné les chiffres avant la virgule ensemble et les chiffres après la virgule ensemble comme dans  $(O_3)$ .

Il aurait sans doute été plus prudent de proposer  $(0_4)$  avant  $(O_3)$ .

## 6. Résolution avec Maxima

Maxima 5.37.2 <http://maxima.sourceforge.net>

```
E(x) := (3*x+1)*(x+2) ;
```

```
print(" E(x) = ",expand(E(x))) ;
```

```

      2
E(x) = 3 x  + 7 x + 2
```

```
E(0) = 2
```

```
E(3) = 50
```

```
E(2/3) = 8
```

```
solve( E(x) = 7 * x + 4, [x] ) ;
```

```

      sqrt(2)      sqrt(2)
[x = - ----, x = ----]
      sqrt(3)      sqrt(3)
```

```
solve( [ E(x) = 3 * x^2 - 1], [x] ) ;
```

$$[x = -\frac{3}{7}]$$

```
solve( [ m-1=2*(k+1), m+1=3*(k-1)], [m,k] ) ;
```

```
[[m = 17, k = 7]]
```

```
1/2+1/3+1/15 ;
```

$$1/2 + 1/3 + 1/15 = \frac{9}{10}$$

```
1/2+1/5+1/6+1/30 ;
```

$$1/2 + 1/5 + 1/6 + 1/30 = \frac{9}{10}$$