Chapitre I
Régression linéaire simple

Licence 3 MIASHS - Université de Bordeaux

Marie Chavent

1. Le modèle

On cherche à modéliser la relation entre deux variables quantitatives continues.
Un modèle de régression linéaire simple est de la forme suivante :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \quad (1)$$

où :

- y est la variable à expliquer (à valeurs dans $\mathbb{R}$) ;
- x est la variable explicative (à valeurs dans $\mathbb{R}$) ;
- ε est le terme d'erreur aléatoire du modèle ;
- β_0 et β_1 sont deux paramètres à estimer.

Commentaires :

- La désignation "simple" fait référence au fait qu'il n'y a qu'une seule variable explicative x pour expliquer y.
- La désignation "linéaire" correspond au fait que le modèle (1) est linéaire en β_0 et β_1.

Pour n observations, on peut écrire le modèle de régression linéaire simple sous la forme :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \tag{2}$$

Dans ce chapitre, on suppose que :

- ε_i est une variable *aléatoire*, non observée,
- x_i est observée et *non aléatoire*,
- y_i est observée et *aléatoire*.

On fait les trois **hypothèses additionnelles** suivantes :

(A1) $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0, \ \forall i = 1, \dots, n,$
ou de manière équivalente :
$\mathbb{E}[y_i] = \beta_0 + \beta_1 x_i, \ \forall i = 1, \dots, n.$

Commentaire sur l'hypothèse (A1) : elle indique que les erreurs sont centrées ce qui implique que y_i dépend seulement de x_i et que les autres sources de variations de y_i sont aléatoires.

(A2) $\mathbb{V}(\varepsilon_i) = \sigma^2, \ \forall i = 1, \dots, n,$
ou de manière équivalente :
$\mathbb{V}(y_i) = \sigma^2, \ \forall i = 1, \dots, n.$

Commentaires sur l'hypothèse (A2) :

- On parle d'hypothèse d'homoscédasticité ($\simeq$ homogénéité des variances).
- Cette variance est supposée constante et indépendante de x_i.
- Cette variance σ^2 est un paramètre du modèle qu'il faudra estimer.

(A3) $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \ \forall i \neq j$
ou de manière équivalente :
$\mathrm{Cov}(y_i, y_j) = 0, \ \forall i \neq j.$

Commentaire sur l'hypothèse (A3) :

- Sous cette hypothèse, les termes d'erreur ε_i sont non corrélés .
- Lorsque l'on rajoutera une hypothèse de normalité sur les ε_i, les erreurs ϵ_i seront alors indépendantes.

On peut écrire matriciellement le modèle (2) de la manière suivante :

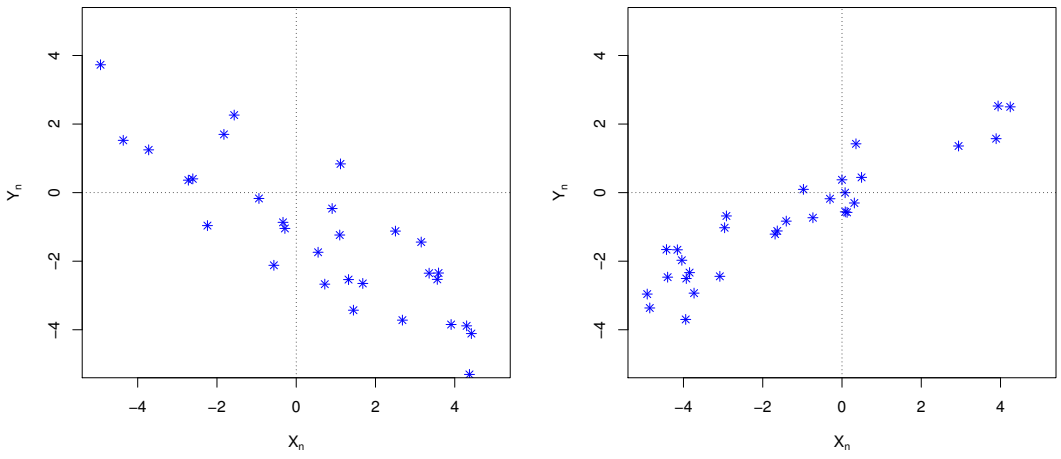
$$Y = X\beta + \varepsilon \tag{3}$$

où

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

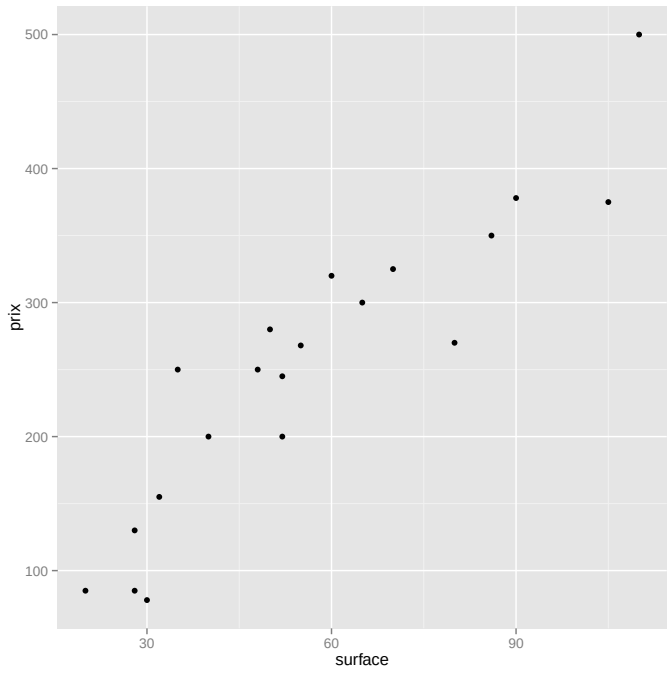
- Y désigne le vecteur à expliquer de taille $n \times 1$,
- X la matrice explicative de taille $n \times 2$,
- ε le vecteur d'erreurs de taille $n \times 1$.

Exemples de deux échantillons $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ simulés :



Exemple de données réelles (données sur des appartements Parisiens).

- y = prix en euros/1000,
- x = surface en m^2.



2. Estimation des paramètres β_0, β_1 et σ^2

A partir de l'echantillon (aléatoire) de n observations

$$\{(x_i, y_i),\ i = 1, \ldots, n\},$$

on veut estimer les paramètres

$$\beta_0,\ \beta_1 \text{ et } \sigma^2.$$

- Pour estimer β_0 et β_1, on peut utiliser la méthode des moindres carrés qui ne nécessite pas d'hypothèse supplémentaire sur la distribution de ε_i (ou de y_i), contrairement à la méthode du maximum de vraisemblance (que l'on peut aussi utiliser) qui est fondée sur la normalité de ε_i (ou de y_i).
- La méthode des moindres carrés ne fournit pas un estimateur de σ^2.

Estimation de β_0 et β_1 par les moindres carrés

On cherche $\widehat{\beta}_0$ et $\widehat{\beta}_1$ qui minimisent la somme des carrés des résidus

$$\widehat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$$

où $\hat{y}_i$ est valeur prédite par le modèle (2) lorsque $x = x_i$. :

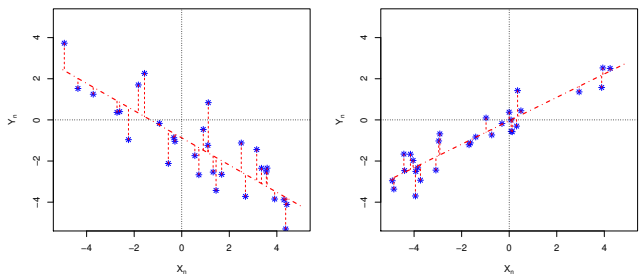
$$\hat{y}_i = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x_i$$

On doit donc résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1) = \text{Arg} \min_{(\beta_0, \beta_1) \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{n} [y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)]^2. \quad (4)$$

Interprétation graphique

Graphiquement, $\widehat{\beta}_0$ et $\widehat{\beta}_1$ sont construits pour minimiser les distances verticales entre les observations (y_n) et la droite de régression théorique $y = \beta_0 + \beta_1 x$. Nous avons représenté ces distances sur les figures ci-dessous.



La droite d'équation $y = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x$ est la droite de régression estimée sur le nuage de points

Résolution du problème d'optimisation

Le problème d'optimisation est :

$$\min_{(\beta_0,\beta_1)} F(\beta_0,\beta_1),$$

avec $F(\beta_0,\beta_1) = \sum_{i=1}^n \{y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)\}^2$.

Le minimum est atteint pour

$$\begin{cases} \frac{\partial F(\beta_0,\beta_1)}{\partial \beta_0}\Big|_{\beta_0=\widehat{\beta}_0,\beta_1=\widehat{\beta}_1} = 0, \\ \frac{\partial F(\beta_0,\beta_1)}{\partial \beta_1}\Big|_{\beta_0=\widehat{\beta}_0,\beta_1=\widehat{\beta}_1} = 0, \end{cases}$$

soit après quelques calculs :

$$\begin{cases} -2\sum_{i=1}^n (y_i - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 x_i) = 0, \\ -2\sum_{i=1}^n (y_i - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 x_i) x_i = 0. \end{cases}$$

Solution du problème d'optimisation

On en déduit après quelques manipulations :

$$\begin{cases} \widehat{\beta}_1 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2} = \frac{c_{x,y}}{s_x^2}, \\ \widehat{\beta}_0 = \bar{y}_n - \widehat{\beta}_1 \bar{x}_n. \end{cases}$$

où $c_{x,y}$ est la covariance empirique entre les x_i et les y_i et s_x^2 est la variance empirique des x_i.

Commentaires

- Le minimum de F est égal à $\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2$. Ce minimum est appelé la somme des carrés des résidus (SCR).
- La valeur prédite $\widehat{y}_i$ estime $\mathbb{E}[y_i] = \beta_0 + \beta_1 x_i$ et non pas y_i. Une meilleure notation serait $\widehat{\mathbb{E}[y_i]}$.
- Aucune des hypothèses (A1), (A2) et (A3) n'a été utilisée ici pour obtenir les estimateurs $\widehat{\beta}_0$ et $\widehat{\beta}_1$.

Propriétés des estimateurs $\widehat{\beta}_0$ et $\widehat{\beta}_1$

Sous les hypothèses (A1), (A2) et (A3), on peut montrer que

- $\mathbb{E}[\widehat{\beta}_0] = \beta_0$,
- $\mathbb{E}[\widehat{\beta}_1] = \beta_1$,
- $\mathbb{V}(\widehat{\beta}_0) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x}_n)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2} \right)$,
- $\mathbb{V}(\widehat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}$.

Commentaires

- Les estimateurs $\widehat{\beta}_0$ et $\widehat{\beta}_1$ sont sans biais.
- Ils sont aussi de variance minimale parmi tous les estimateurs linéaires (par rapport à $y_1, \ldots, y_n$) sans biais (propriété dite de Gauss-Markov).

Estimation de σ^2

Le paramètre σ^2 est défini par

$$\sigma^2 = \mathbb{V}(\varepsilon_i) = \mathbb{V}(y_i) = \mathbb{E}\left[(y_i - \mathbb{E}[y_i])^2\right].$$

En prenant $\hat{y}_i = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x_i$ comme estimateur de $\mathbb{E}[y_i]$, il apparaît naturel d'estimer σ^2 par

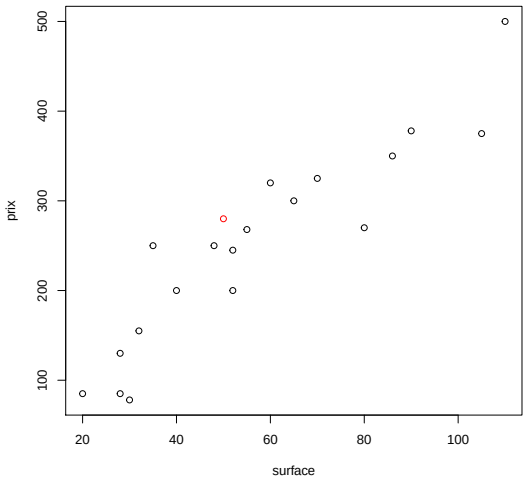
$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n (\widehat{\varepsilon}_i)^2}{n-2} = \frac{SCR}{n-2}.$$

Commentaires

- s^2 est un estimateur sans biais de σ^2
- La perte de deux degrés de liberté dans l'expression de s^2 est le "coût" de l'estimation de β_0 et de β_1 nécessaire pour obtenir les $\hat{y}_i$.

Exemple de données réelles : les appartements Parisiens.

```
##   prix surface
## 1  130      28
## 2  280      50
## 3  268      55
## 4  500     110
## 5  320      60
## 6  250      48
```



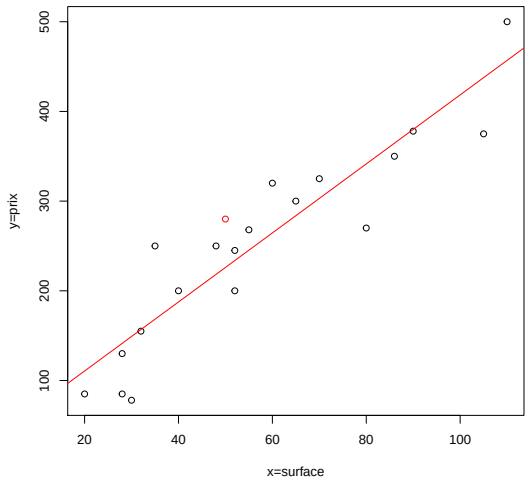
Sorties R

```
mod <- lm(y ~ x) #fonction linear model
names(mod)
```

```
##  [1] "coefficients"  "residuals"     "effects"       "rank"          "fitted.values" "assign"
##  [7] "qr"            "df.residual"   "xlevels"       "call"          "terms"         "model"
```

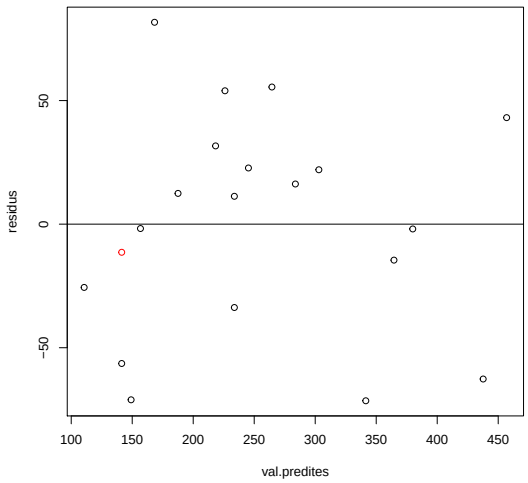
```
summary(mod)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = y ~ x)
##
## Residuals:
##    Min     1Q Median     3Q    Max
## -71.47 -27.63   4.75  24.96  81.68
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   33.644     24.445    1.38     0.19
## x              3.848      0.392    9.81  1.2e-08 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 45 on 18 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.842, Adjusted R-squared:  0.834
## F-statistic: 96.3 on 1 and 18 DF,  p-value: 1.2e-08
```

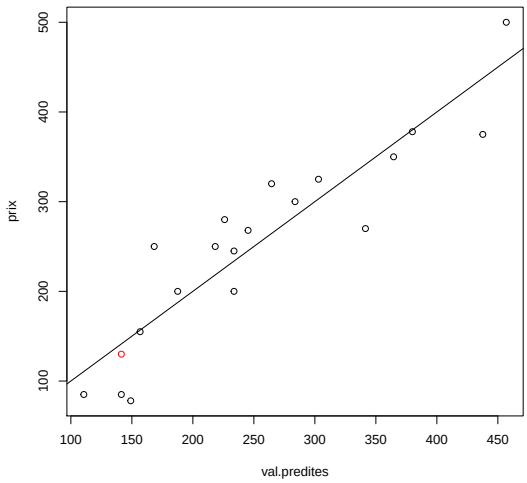



```
##     y val.predites residus
## 1 130          141     -11
## 2 280          226      54
## 3 268          245      23
## 4 500          457      43
## 5 320          265      55
```


Graphique croisant les valeurs prédites $\hat{y}_i$ et les résidus $\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$



Graphique croisant les valeurs prédites $\hat{y}_i$ et les valeurs observées y_i



Typiquement, les hypothèses portant sur β_1 ont plus d'intérêt que celles portant sur β_0. On va donc se limiter à tester la nullité de la pente β_1 (absence de liaison linéaire entre x et y) :

$$\mathcal{H}_0 : \text{“}\beta_1 = 0\text{”} \qquad \text{contre} \qquad \mathcal{H}_1 : \text{“}\beta_1 \neq 0\text{”}$$

Pour faire ce test, il est nécessaire de faire une **hypothèse supplémentaire** :

(A4) $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

ou de manière équivalente

$y_i \sim \mathcal{N}(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2)$.

Commentaire. L'unique “nouveauté” ici est la normalité.

Nouvelles propriétés pour les estimateurs $\widehat{\beta}_1$ et s^2

Sous les hypothèses (A1)-(A4), on a :

(a) $\widehat{\beta}_1 \sim \mathcal{N}\left(\beta_1, \dfrac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}\right)$;

(b) $\dfrac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$;

(c) $\widehat{\beta}_1$ et s^2 sont indépendants.

Commentaires. La propriété (a) est facile à établir. Les propriétés (b) et (c) seront démontrées ultérieurement.

Un rappel de probabilité

Si $U \sim \mathcal{N}(0,1)$, $V \sim \chi^2(\nu)$ et U est indépendant de V, alors $\dfrac{U}{\sqrt{\frac{V}{\nu}}} \sim T(\nu)$.

On déduit alors des propriétés (a)-(c) que

$$\frac{\widehat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}}} \Big/ \sqrt{\frac{\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2}}{n-2}} = \frac{\widehat{\beta}_1 - \beta_1}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}} \sim T(n-2).$$

Commentaire. On peut remarquer que le dénominateur $s/\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}$ est un estimateur de $\sqrt{\mathbb{V}(\widehat{\beta}_1)}$, l'écart-type de $\widehat{\beta}_1$.

On utilisera la statistique suivante :

$$T_n = \frac{\widehat{\beta}_1 - \beta_1}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}},$$

qui est distribuée selon une loi de Student à $n-2$ degrés de libertés.

Test de $\mathcal{H}_0$ contre $\mathcal{H}_1$

Sous l'hypothèse $\mathcal{H}_0$: "$\beta_1 = 0$", on a

$$T_n = \frac{\widehat{\beta}_1}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X}_n)^2}} \sim T(n-2). \tag{5}$$

Pour une hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$: "$\beta_1 \neq 0$" bilatérale, on rejette $\mathcal{H}_0$ avec un risque $0 \leq \alpha \leq 1$ si

$$|t| \geq t_{n-2,\,1-\alpha/2}$$

où t est la réalisation de T_n et $t_{n-2,1-\alpha/2}$ est le fractile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi $T(n-2)$.

Commentaire. Pour réaliser ce test, on peut également regarder la p-valeur aussi appelée niveau de signification du test : si p-valeur $\leq \alpha$, on rejette $\mathcal{H}_0$. Dans le cas d'un test bilatéral ($\mathcal{H}_1$: "$\beta_1 \neq 0$"), on a :

$$p\text{-valeur} = \mathbb{P}(|T_n| > |t| \,/\, \mathcal{H}_0). \tag{6}$$

On rejette $\mathcal{H}_0$ si p-valeur $\leq \alpha$

Intervalle de confiance pour β_1 au niveau de confiance $1-\alpha$:

L'intervalle de confiance de β_1 est :

$$[\widehat{\beta}_1 \pm t_{n-2,\,1-\alpha/2}\,\frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)^2}}].$$

Commentaire. On rejette $\mathcal{H}_0$ si 0 n'appartient pas à cet intervalle.

Exemple des données appartements.

```
summary(mod)$coefficients
```

```
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)     33.6      24.44     1.4  1.9e-01
## x                3.8       0.39     9.8  1.2e-08
```

```
confint(mod)
```

```
##             2.5 % 97.5 %
## (Intercept)   -18   85.0
## x               3    4.7
```


Table d'analyse de la variance (ANOVA) : On complète souvent l'étude en construisant la table d'ANOVA.

Source de variation	Somme des carrés	ddl	carré moyen	F
régression (expliquée)	$SCE = \sum_{i=1}^{n}(\widehat{y}_i-\bar{y}_n)^2$	1	$\sum_{i=1}^{n}(\widehat{y}_i-\bar{y}_n)^2$	$\frac{SCE}{SCR/(n-2)}$
Résiduelle	$SCR = \sum_{i=1}^{n}(y_i-\widehat{y}_i)^2$	n-2	$\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\widehat{y}_i)^2$	
Totale	$SCT = \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y}_n)^2$	n-1	$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y}_n)^2$	

Commentaire. La statistique F, dite statistique de Fisher, permet de tester $\mathcal{H}_0$: "$\beta_1 = 0$" contre $\mathcal{H}_1$: "$\beta_1 \neq 0$".

On rejette $\mathcal{H}_0$ si

$$F > f_{1,n-2,\,1-\alpha}$$

où $f_{1,n-2,\,1-\alpha}$ est le fractile d'ordre $1-\alpha$ d'une loi $F(1, n-2)$.

Commentaires.

- Le carré d'une variable de Student à ν degrés de libertés est une variable de Fisher à $(1, \nu)$ degrés de libertés.
- En régression linéaire simple, le test de Fisher issu de l'ANOVA est donc le même que le test de student pour tester la nullité de β_1.
- En régression linéaire multiple, la table d'ANOVA et le test de Fisher permettront de tester la nullité simultanée des p coefficients des p variables explicatives soit $\mathcal{H}_0$: "$\beta_1 = \ldots = \beta_p = 0$".

Exemple des données appartements.

```
anova(mod)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Response: y
##           Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
## x          1 195068  195068    96.3 1.2e-08 ***
## Residuals 18  36477    2026
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```


4. Coefficient de détermination

Le coefficient de détermination R^2 est défini par

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}_n)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2} = \frac{\text{variabilité expliquée (SCE)}}{\text{variabilité totale (SCT)}} = 1 - \frac{SCR}{SCT}$$

Remarque. On a la formule "classique" de l'analyse de la variance nous donnant la décomposition suivante :

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}_n)^2$$

$$\text{variabilité totale} = \text{variabilité résiduelle} + \text{variabilité expliquée}$$

Commentaire. Le coefficient R^2 donne la proportion de variabilité de y qui est expliquée par le modèle. Plus le R^2 est proche de 1, meilleure est l'adéquation du modèle aux données.

```
summary(mod)$r.squared
```

```
## [1] 0.84
```

On désire prévoir à l'aide du modèle la valeur de la variable y pour une valeur non observé x_0 de x.

D'après le modèle on a $y_0 = \beta_0 + \beta_1 x_0 + \varepsilon_0$, où y_0 et ε_0 sont des variables aléatoires. La prédiction naturelle est alors :

$$\widehat{y_0} = \widehat{\mathbb{E}[y_0]} = \widehat{\beta_0} + \widehat{\beta_1} x_0.$$

L'erreur de prédiction est définie par $\widehat{y_0} - y_0$ et on peut montrer que sous les hypothèses du modèle (incluant l'hypothèse de normalité), on a :

$$\widehat{y_0} - y_0 \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x}_n)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}\right)\right). \tag{7}$$

On en déduit que :

$$\frac{y_0 - \hat{y}_0}{\sigma\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x}_n)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

On peut montrer que :

$$\frac{y_0 - \hat{y}_0}{s\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x}_n)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}}} \sim T(n-2).$$

On utilise ce résultat pour construire un intervalle de prédiction pour y_0, c'est à dire l'intervalle $[A, B]$ tel que

$$\mathbb{P}(A \leq y_0 \leq B) = 1 - \alpha.$$

Ici, y_0 est une variable aléatoire et non pas un paramètre. L'intervalle de prédiction est donc un intervalle dans lequel une future observation y_0 va tomber avec une certaine probabilité (différent d'un intervalle de confiance).

On en déduit l'intervalle de prédiction pour y_0 au niveau de confiance $1-\alpha$ suivant :

$$\left[\hat{y}_0 \pm t_{n-2,\,1-\alpha/2}\, s\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x}_n)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x}_n)^2}}\right]$$

Commentaires. La variance de l'erreur de prévision dépend

- de la variabilité intrinséque σ^2 de la variable (aléatoire) y_0,
- de la variabilité due à "l'imprécision" des estimations de β_0 et β_1 dans la formule de régression.
  Cette source de variabilité peut être réduite (en augmentant la taille de l'échantillon par exemple), contrairement à la première source de variabilité.

On peut aussi construire un intervalle de confiance de la valeur moyenne

$$\mathbb{E}[y_0] = \beta_0 + \beta_1 x_0,$$

qui est cette fois un paramètre. On va donc chercher l'intervalle aléatoire $[A, B]$ tel que

$$\mathbb{P}(A \leq \mathbb{E}[y_0] \leq B) = 1-\alpha.$$

Pour construire cet intervalle, on montre que :

$$\hat{y}_0 \sim \mathcal{N}\left(\beta_0+\beta_1 x_0, \sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x}_n)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x}_n)^2}\right)\right), \tag{8}$$

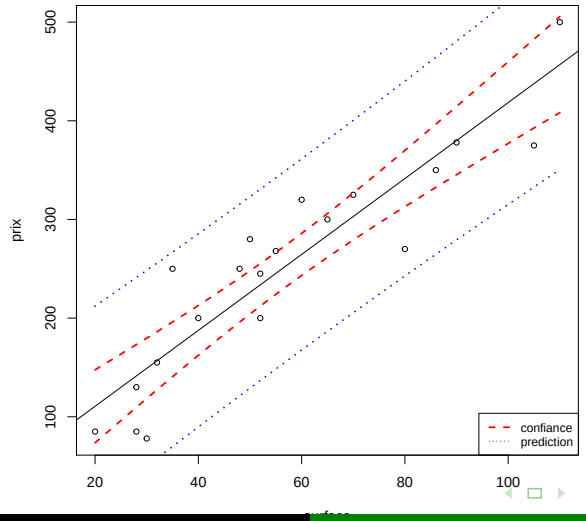
$$\frac{\hat{y}_0-\beta_0+\beta_1 x_0}{s\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x}_n)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x}_n)^2}}} \sim T(n-2). \tag{9}$$

On en déduit l'intervalle de confiance de $\mathbb{E}[y_0]$ suivant :

$$\left[\widehat{y_0} \mp t_{n-2,\,1-\alpha/2}\, s\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x}_n)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x}_n)^2)}}\right].$$

Exemple des données appartements.

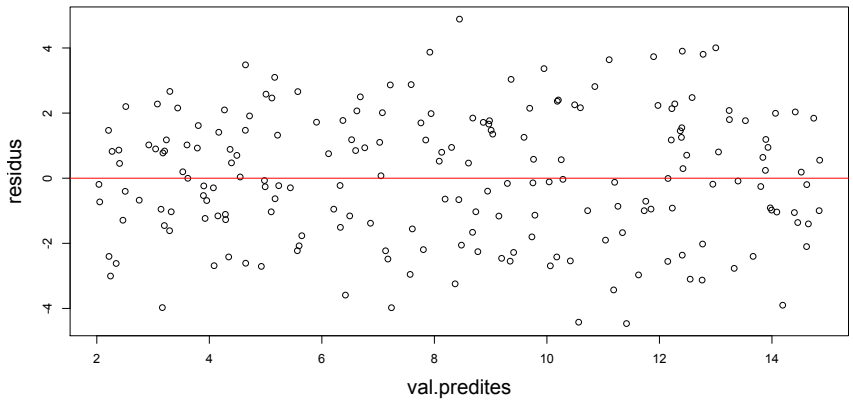
```
x0 <- 50
predict(mod,data.frame(x=x0),interval="prediction")


##   fit lwr upr
## 1 226 129 323


predict(mod,data.frame(x=x0),interval="confidence")


##   fit lwr upr
## 1 226 204 248
```



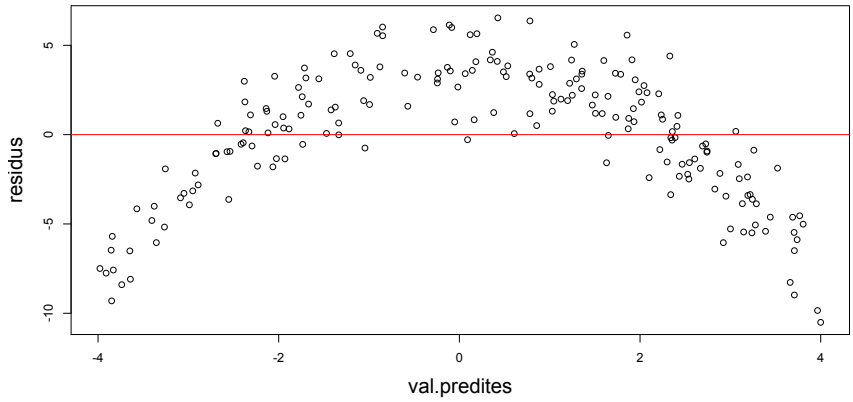
6. Quelques compléments utiles

Quelques graphiques permettant de "vérifier visuellement" des hypothèses sous-jacentes.

- Graphique croisant les valeurs prédites $\hat{y}_i$ et les résidus $\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$:



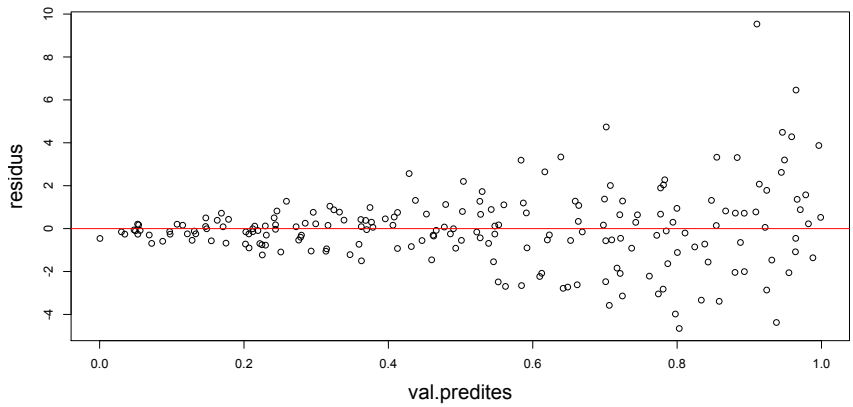
On observe un "comportement aléatoire" et "une variance constante".



On observe un "structure évidente" dans les résidus (qui ne sont plus vraiment aléatoires).

$\hookrightarrow$ Il faut "changer" de modèle pour essayer de prendre en compte cette structure.

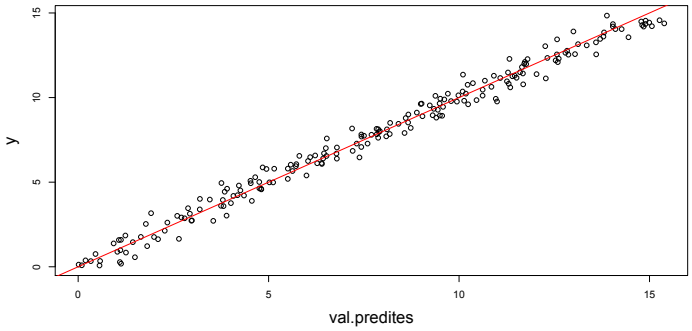
(Par exemple rajouter un terme quadratique x^2 dans la partie explicative du modèle).



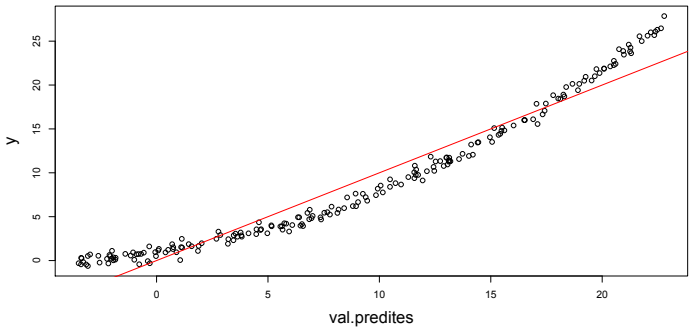
On observe que "la variance des résidus n'est pas constante", elle augmente clairement en fonction de $\hat{y}_i$ (elle dépend donc des x_i). Il n'y a donc pas homoscédasticité.

$\hookrightarrow$ Il faut "changer" de modèle pour prendre en compte cette hétéroscédasticité.

- Graphique croisant les valeurs prédites $\hat{y}_i$ et les valeurs observées y_i :



Les points s'alignent sur la première bissectrice :
l'adéquation du modèle aux données est correcte.



On voit ici clairement apparaître une structure non linéaire :
il y a une mauvaise adéquation du modèle.

$\hookrightarrow$ Il faut changer de modèle.

Normalité des résidus.

La **théorie** sous-jacente à l'inférence du modèle (tests d'hypothèses portant sur le paramètre β_1 (ou β_0) et aux intervalles de confiance et de prédiction) suppose la normalité du terme d'erreur ε_i.

Il convient donc de tester cette hypothèse *a posteriori* en utilisant les résidus du modèle : $\{\hat{\varepsilon}_i,\ i = 1, \ldots, n\}$. Pour cela, on peut faire un test de normalité de Shapiro-Wilk.

```
residus <- resid(mod)
shapiro.test(residus)
```

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  residus
## W = 0.97, p-value = 0.669
```

Dans l'exemple des appartements, en prenant un risque de première espèce de 5%, on accepte la normalité des résidus (p-value=0.5177$> \alpha = 5\%$). Les tests d'hypothèses sont donc "valides" ainsi que les intervalles de confiance.

On peut aussi faire un examen graphique de la normalité des résidus.

Résidus **standardisés** : on divise $\hat{\varepsilon}_i$ par son écart-type (estimé) :

$$\hat{\varepsilon}_i^* = \frac{\hat{\varepsilon}_i}{s\sqrt{1 - h_{ii}}}$$

avec $h_{ii} = \frac{1}{n} + \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$

Parfois appelé résidus **studentisés** (interne) car comme $\hat{\varepsilon}_i$ suit une loi normale, on peut montrer que $\hat{\varepsilon}_i^* \sim T(n-2)$ et pour n assez grand on pourra considérer que $\hat{\varepsilon}_i^* \sim \mathcal{N}(0, 1)$.